數學傳播 48卷3期, pp. 68-86

平面中直線循環的矩陣變換

趙湞揚 · 龔書宏

一、前言

此份研究主要探討: 給定一組 n 條直線 L_1、L_2、$\cdots$、L_n, 就這 n 條直線的相對位置、交點情形及 n, 判斷是否存在矩陣變換 T 使得 L_k 可經由矩陣 A 映射到 L_{k+1}, 其中 $k=1,2,\ldots,n$ 且 $L_{n+1}=L_1$, 並討論矩陣的唯一性與求出矩陣的一般模樣。

二、符號定義

(一) $\forall\, k,m,n\in\mathbb{N}$, L_k、S_k 分別代表坐標平面上的直線及點集合, $R^{m\times n}$ 則代表所有的 $m\times n$ 階實係數矩陣構成的集合, 且 $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in R^{2\times 2}$。

(二) 對於一點 $P(x,y)$ 或一向量 $\overrightarrow{V}=(x,y)$, $\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ 簡記爲 P、$\overrightarrow{V}$, $A\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ 簡記爲 AP、$A\overrightarrow{V}$。此外, 易知若 $AP=Q$、$AR=S$, 則 $A\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$。

(三) 線性變換 $T: R^{2\times 1}\to R^{2\times 1}$, $T\Big(\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\Big)=A\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ 爲 A 的平面變換, 若 S_1 經由 T 變換後的像爲 S_2, 則記做 $S_1\overset{A}{\to}S_2$。若 P 點滿足 $AP=P$, 則 P 稱爲固定點。

(四) 若 $L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}L_3$, 則稱 L_1 和 L_2 相鄰、L_2 和 L_3 相鄰、L_1,L_2,L_3 爲相鄰的三條直線。

(五) 若 $L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}\cdots\overset{A}{\to}L_n\overset{A}{\to}L_1$, 且 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 皆相異, 則稱這 n 條直線循環; 特別地, 2 條直線循環可簡記爲 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$。

舉例: 若 $n\ge 3$, 則 L_{n-1} 和 L_n 相鄰、L_n 和 L_1 相鄰、L_{n-1},L_n,L_1 爲相鄰的三條直線, 其餘依此類推。

(六) A 的特徵值所構成的集合稱爲 λ_A; 特別地, 因爲由線性代數的特徵理論可知, 若 $\lambda_A=\{\lambda_1,\lambda_2\}$, 則恆有 $\det A=\lambda_1\lambda_2$ 且 A^n 的特徵值必爲 $(\lambda_1)^n$ 及 $(\lambda_2)^n$, 所以令 A^n 的特徵值所構成的集合可簡記爲 $(\lambda_A)^n$。

(七) 當 $L_1\nparallel L_2$ 且 $L_1\neq L_2$ 時, 令 $L_1\cap L_2$ 表示 L_1 與 L_2 的交點。

三、本文

(一) $L_1 \overset{A}{\to} L_2$ 的可行性與基本性質

這一小節中, 我們證明直線的變換完全等價於點和方向向量的變換, 並討論了在不同的循環長度下固定點的狀況及個數。

性質 1.1: 矩陣 A 的平面變換爲 T, 則:

(1) (a) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow T$ 必單射且滿射; (b) $\det A = 0 \Leftrightarrow T$ 必不單射且不滿射。

(2) 若 T 單射且 $\overrightarrow{V_1} \neq \overrightarrow{0}$、$\overrightarrow{V_2} = A\overrightarrow{V_1}$, 則 $\overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{0}$。

(3) L_1 經由 T 變換後的像必爲一直線或一點, 特別地, 若 $\det A \neq 0$, 則必爲一直線。

(4) 設 $\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_1 的方向向量且 $P \in L_1$, 則 $L_1 \overset{A}{\to} L_2$ 若且唯若 $AP \in L_2$ 且 $A\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_2 的方向向量。

證明:

(1) (a) $\Rightarrow$: 因爲$\det A \neq 0$, 所以A^{-1}存在(亦即反函數存在)$\Rightarrow T$ 對射 (也就是既單射又滿射)。

$\Leftarrow$: T 對射 $\Rightarrow$ T 單射 $\Rightarrow$ $AP = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 之解只有 $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (單射的性質) $\Rightarrow$ 由克拉瑪法則可知, 因爲 $AP = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 具有唯一解, 所以 $\det A \neq 0$。

(b) 由 (a) 可知, $\det A = 0 \Leftrightarrow T$ 不單射,

又 $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ 向量 (a,b) 與 (c,d) 所張的平行四邊形面積爲 0。

<case1>: 若 $(a,b) = \overrightarrow{0}$ 或 $(c,d) = \overrightarrow{0}$, 則 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$。

<case2>: 若 $(a,b)//(c,d)$, 則 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ tk \end{bmatrix}$ $(k, t \in \mathbb{R})$。

在上面兩種情況中, $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 皆只能爲單方向的向量, 所以 T 不滿射。

(2) 由 (1) 得知, T 單射 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

假設 $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}$, 將 $\overrightarrow{V_2} = A\overrightarrow{V_1}$ 兩邊同乘 A^{-1}, 得 $\overrightarrow{V_1} = A^{-1}\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}$ (矛盾),

所以 $\overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{0}$。

(3) 令 $L_1 : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, 其中 $(x_0, y_0) \in L_1$, 且 (a,b) 爲 L_1 的方向向量。

令 $A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{x_0}'\\{y_0}'\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$,

則 $A\begin{bmatrix}x_0+at\\y_0+bt\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+tA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{x_0}'\\{y_0}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}{x_0}'+a't\\{y_0}'+b't\end{bmatrix}$.

(a) 若 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=\overrightarrow{0}$, 則 L_1 經由 T 變換後的像爲 $({x_0}',{y_0}')$。

(b) 若 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}\neq\overrightarrow{0}$, 則 $\begin{cases}x={x_0}'+a't\\y={y_0}'+b't\end{cases}$ 爲另一直線 L_2 之參數式, 代表 L_1 上的點經由 T 變換後, 一一對應至 L_2, 且 L_2 的方向向量爲 (a',b')、$({x_0}',{y_0}')\in L_2$, 亦即 $L_1\overset{A}{\to}L_2$。

(c) 若 $\det A\neq 0$, 且 $(a,b)\neq\overrightarrow{0}$, 則 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\neq\overrightarrow{0}$, 所以 $L_1\overset{A}{\to}L_2$。

(4) $\Rightarrow$: 若 $L_1\to L_2$ 且 $P\in L_1$, 則由矩陣變換之定義, 顯然有 $AP\in L_2$。
若 $\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_1 的方向向量, 假設 $A\overrightarrow{l_1}$ 卻不是 L_2 的方向向量,
則 $P+\overrightarrow{l_1}$ 經由矩陣變換後變爲 $AP+A\overrightarrow{l_1}\notin L_2$ (矛盾), 所以 $A\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_2 的方向向量。

$\Leftarrow$: 可由 (3) 的證明過程中推知。

註記: 性質1.1.(3) 及1.1.(4) 非常重要, 它爲後續的矩陣運算賦予了正當性及完備性。

性質 1.2: 若 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$, 則
(1) L_1、L_2 必同時過 $(0,0)$ 或不過 $(0,0)$。
(2) 若 $L_1\nparallel L_2$ 且 $L_1\neq L_2$, $L_1\cap L_2=P$, 則 L_1、L_2 上存在唯一固定點 P。

證明:
(1) 因爲 $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, 所以: $(0,0)\in L_1\Leftrightarrow(0,0)\in L_2$, 意即:$(0,0)\notin L_1\Leftrightarrow(0,0)\notin L_2$。
(2) 因爲 $P\in L_1$且 $P\in L_2$, 所以 $AP\in L_2$ 且 $AP\in L_1\Rightarrow AP=L_2\cap L_1=P$, 且亦知 L_1、L_2 上不可能有其他固定點。

性質 1.3: 若矩陣變換 T 滿足 $L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}L_3$, 其中 $L_1\cap L_2=P$ 且 $L_2\cap L_3=Q$, 則 $AP=Q$。

證明: $\because$ $P\in L_1$ 且 $L_1\overset{A}{\to}L_2$ $\therefore$ $AP\in L_2$,

$\because$ $P\in L_2$ 且 $L_2\overset{A}{\to}L_3$ $\therefore$ $AP\in L_3\Rightarrow AP=L_2\cap L_3=Q$.

特別地, 若取 $L_3=L_1$ 可得性質 1.2。

性質 1.4: 若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ $(n \geq 3)$, 且 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 皆相異, 則

(1) L_1、L_2、$\cdots$、L_n 必同時過 $(0,0)$ 或不過 $(0,0)$。

(2) L_1、L_2、$\cdots$、L_n 只有以下三種情形:
- (a) n 條直線皆平行、沒有交點;
- (b) n 條直線共交點;
- (c) 相鄰不平行且任相鄰三條不共點的相異直線。

證明:

(1) 同性質1.2的證明方法。

(2) 若有任相鄰直線平行, 即 $A\overrightarrow{l} = t\overrightarrow{l}$ $(t \neq 0)$, 由矩陣變換循環可得 n 條直線皆平行。

<case1> (a) n 條直線平行, 再由 L_1、L_2、$\cdots$、L_n 皆相異可知 n 條直線皆沒有交點。

<case2> n條直線相鄰不平行: 若有任相鄰三條直線共點 P, 由引理 1 可得 $AP = P \Rightarrow P \in L_k$, 其中 $k = 1, 2, \ldots, n$ $\therefore$ (b) n 條直線共交點; (c) 相鄰不平行且任相鄰三條不共點的相異直線。

性質 1.5: 若 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$, 令 $n(T)$ 表示 L_1 上的固定點個數, 則:

(1) 若 $(0,0) \notin L_1$, 則 $n(T) = 0$ 或 1 或 ∞。

(2) 若 $(0,0) \in L_1$, 則 $n(T) = 1$ 或 ∞。

證明:

(1) 設 $\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_1 的方向向量, P、$Q \in L_1$ $(P, Q \neq (0,0))$ 且 $AP = Q$

<case1>: $A\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{l_1}, A(P + k\overrightarrow{l_1}) = Q + k\overrightarrow{l_1} (k \in R)$

$\Rightarrow$ 當 $P \neq Q$ 時, $n(T) = 0$; 當 $P = Q$ 時, $n(T) = \infty$。

<case2>: $A\overrightarrow{l_1} = t\overrightarrow{l_1}$ $(t \neq 0, 1)$, 則 $A(P + k\overrightarrow{l_1}) = Q + kt\overrightarrow{l_1}$

$\Rightarrow$ 當 $P = Q$ 時, $n(T) = 1$; 當 $P \neq Q$ 時, 設 $P - Q = s\overrightarrow{l_1}$ $(s \neq 0)$。

僅當 $k = \dfrac{s}{t-1}$ 時, $P + k\overrightarrow{l_1} = Q + kt\overrightarrow{l_1}$, 所以 $n(T) = 1$。

(2) 證明同上, 令 $P = (0,0)$, 則 $Q = AP = (0,0)$, 同理可得 $n(T) = 1$ 或 ∞。

(二) 使 2 條直線循環 $(L_1 \overset{A}{\leftrightarrow} L_2)$ 的矩陣變換

這一小節中, 我們將處理滿足 $L_1 \overset{A}{\leftrightarrow} L_2$ 的線性變換, 並利用 L_1 與 L_2 的相交情形, 對平面變換 T 的變換矩陣 A 做討論。

討論方法

(1) 截距式與克拉瑪公式方法 (我們最初的切入點)

$$L_1:\frac{x}{m_1}+\frac{y}{n_1}=1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2:\frac{x}{m_2}+\frac{y}{n_2}=1\ (L_1\nparallel L_2\text{ 且 }L_1\neq L_2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1&0\\0&n_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}am_1&bn_1\\cm_1&dn_1\end{bmatrix},\\[2mm]\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_2&0\\0&n_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}am_2&bn_2\\cm_2&dn_2\end{bmatrix}.\end{cases}$$

因爲 $(m_1,0)$、$(0,n_1)\in L_1$, 所以 (am_1,cm_1)、$(bn_1,dn_1)\in L_2$; 同理, (am_2,cm_2)、$(bn_2,dn_2)\in L_1$

$$\Rightarrow\begin{cases}(am_1,cm_1)、(bn_1,dn_1)\text{ 代入 }L_2\\(am_2,cm_2)、(bn_2dn_2)\text{ 代入 }L_1\end{cases}\text{得}\begin{cases}\frac{am_1}{m_2}+\frac{cm_1}{n_2}=1\\\frac{bn_1}{m_2}+\frac{dn_1}{n_2}=1\\\frac{am_2}{m_1}+\frac{cm_2}{n_1}=1\\\frac{bn_2}{m_1}+\frac{dn_2}{n_1}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n_2a+m_2c=\frac{m_2n_2}{m_1}\cdots\text{(a)}\\n_2b+m_2d=\frac{m_2n_2}{n_1}\cdots\text{(b)}\\n_1a+m_1c=\frac{m_1n_1}{m_2}\cdots\text{(c)}\\n_1b+m_1d=\frac{m_1n_1}{n_2}\cdots\text{(d)}.\end{cases}$$

由 (a)、(c): $\begin{cases}n_2a+m_2c=\frac{m_2n_2}{m_1}\\n_1a+m_1c=\frac{m_1n_1}{m_2}\end{cases}$ 由克拉瑪公式, $\Delta_1:=\begin{bmatrix}n_2&m_2\\n_1&m_1\end{bmatrix}=m_1n_2-m_2n_1.$

因爲 $L_1\nparallel L_2$ 且 $L_1\neq L_2\Leftrightarrow m_1n_2-m_2n_1\neq 0$ (即 $\dfrac{m_1}{m_2}\neq\dfrac{n_1}{n_2}$) $\Leftrightarrow\Delta_1\neq 0$, 亦即 a,c 存在且唯一同理, 由 (b)、(d): $\begin{cases}n_2b+m_2d=\frac{m_2n_2}{n_1}\\n_1b+m_1d=\frac{m_1n_1}{n_2}\end{cases}\Rightarrow\Delta_2:=\begin{vmatrix}n_2&m_2\\n_1&m_1\end{vmatrix}=m_1n_2-m_2n_1=\Delta_1$ 且 b,d 存在且唯一又

$$\Delta x_1:=\begin{vmatrix}\frac{m_2n_2}{m_1}&m_2\\\frac{m_1n_1}{m_2}&m_1\end{vmatrix},\ \Delta y_1:=\begin{vmatrix}n_2&\frac{m_2n_2}{m_1}\\n_1&\frac{m_1n_1}{m_2}\end{vmatrix},\quad\Delta x_2:=\begin{vmatrix}\frac{m_2n_2}{m_2}&m_2\\\frac{m_1n_1}{m_1}&m_1\end{vmatrix},\quad\Delta y_2:=\begin{vmatrix}n_2&\frac{m_2n_2}{n_1}\\n_1&\frac{m_1n_1}{n_2}\end{vmatrix},$$

$$\therefore A=\frac{1}{m_1n_2-m_2n_1}\begin{bmatrix}\Delta x_1&\Delta x_2\\\Delta y_1&\Delta y_2\end{bmatrix}=\frac{1}{m_1n_2-m_2n_1}\begin{bmatrix}-(m_1n_1-m_2n_2)&\frac{m_1m_2(n_2^2-n_1^2)}{n_1n_2}\\\frac{n_1n_2(m_1^2-m_2^2)}{m_1m_2}&m_1n_1-m_2n_2\end{bmatrix}.$$

此種討論方法的優點在於, 使用截距式會讓 L_1、L_2 分別都跑出兩個代數式很好看的點。但它局限於直線同時存在 x 截距、y 截距, 不適用推廣到水平線、鉛垂線和過原點直線, 並且難以化簡; 再者, 它單純是用「點變換」來解, 不容易看出其代數式所代表之深層含義。

(2) 矩陣向量方法 (建立在性質 1.1 (4) 上的方法)

由性質1.1(4) 我們知道, 若 $P \in L_1$,

則 $L_1 \xrightarrow{A} L_2$ 完全等價於 $P \xrightarrow{A} Q$ 且 $A \times L_1$ 的方向向量 $=L_2$ 的方向向量,

所以我們可以把矩陣 A 滿足前者 ($L_1 \xrightarrow{A} L_2$) 轉化爲滿足後者。

更貼切地說, 所有滿足後者條件的矩陣 A, 即爲滿足前者條件的所有矩陣 A!

這個方法看似沒什麼厲害, 但使用起來卻有異常神奇的效果!

詳細的過程請參見性質 2.1 及後續性質。

性質 2.1 (**不過原點不平行**): 給定不過原點不平行的兩條直線 $L_1: ax+by=1$、$L_2: cx+dy=1$, 則存在在唯一的線性變換滿足 $L_1 \overset{A}{\leftrightarrow} L_2$, 其中變換矩陣 $A=[-\overrightarrow{l_2}, -\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$, 其中 $\overrightarrow{l_1}=(b,-a)$、$\overrightarrow{l_2}=(d,-c)$ (也就是行向量 $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$)。

證明: 取 $\overrightarrow{l_1}=(b,-a)$、$\overrightarrow{l_2}=(d,-c)$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量。

令 $A\overrightarrow{l_1}=t\overrightarrow{l_2}$、$A\overrightarrow{l_2}=k\overrightarrow{l_1}$ $(t,k \in \mathbb{R}-\{0\})$ (由性質1.1(4))、$L_1 \cap L_2 = P = (x_0, y_0)$,

則由性質 1.2 得知, $AP=P$,

$$\Rightarrow A[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}] = A\begin{bmatrix} b & d \\ -a & -c \end{bmatrix} = [t\overrightarrow{l_2}, k\overrightarrow{l_1}] = \begin{bmatrix} dt & bk \\ -ct & -ak \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \det A \times \det\left(\begin{bmatrix} b & d \\ -a & -c \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} dt & bk \\ -ct & -ak \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \det A = -tk.$$

又 $A[P, \overrightarrow{l_1}] = A\begin{bmatrix} x_0 & b \\ y_0 & -a \end{bmatrix} = [P, t\overrightarrow{l_2}] = \begin{bmatrix} x_0 & dt \\ y_0 & -ct \end{bmatrix}$,

$\Rightarrow \det A \times \det\left(\begin{bmatrix} x_0 & b \\ y_0 & -a \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x_0 & dt \\ y_0 & -ct \end{bmatrix}\right)$.

再由 $ax_0+by_0=1$、$cx_0+dy_0=1$ 帶入運算可得 $\det A = t \Rightarrow t=-tk \Rightarrow k=-1$。

同理, 取 $A[P, \overrightarrow{l_2}] = [P, k\overrightarrow{l_1}]$ 再進行一次運算可得 $t=-1$,

$\therefore$ $\det A = t = -1$ 且 $A[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}] = [t\overrightarrow{l_2}, k\overrightarrow{l_1}] = [-\overrightarrow{l_2}, -\overrightarrow{l_1}]$。

又 $[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 必存在 ($\because$ $\overrightarrow{l_1}$ 不平行 $\overrightarrow{l_2}$),

$\therefore$ $A = [-\overrightarrow{l_2}, -\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定兩直線 $L_1: 2x+y=1$、$L_2: 3x+4y=1$, $\overrightarrow{l_1}=(1,-2)$、$\overrightarrow{l_2}=(4,-3)$,

$$A=\begin{bmatrix}-4&-1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\-2&-3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-1\\3&2\end{bmatrix}\times\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&-4\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

驗證: L_1 的參數式可設爲 $(x,1-2x)$, 經由矩陣 A 映射: $\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1-2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x+3\\3x-2\end{bmatrix}$,

其軌跡即爲直線 L_2; L_2 的參數式可設爲 $(-4x+3,3x-2)$, 經由矩陣 A 映射:

$\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4x+3\\3x-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\1-2x\end{bmatrix}$, 其軌跡即爲直線 L_1。

註記: 其餘性質請讀者仿照以上方式自己驗證!

性質 2.2 (**過原點、不平行**): 給定過原點不平行的兩條直線 L_1、L_2, 任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$, 其中變換矩陣
$A=[t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ (受 t、k 兩獨立變數影響, 其中 t、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$)。

證明: $\because$ $(0,0)\in L_1$、L_2 且 $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,

$\therefore$ 已經滿足點的變換, 由性質1.1(4), 只需再滿足方向向量的變換即可,

$\Rightarrow$ 令 $A[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_1}]$ (t、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$)。

又 $[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 必存在 ($\because$ $\overrightarrow{l_1}$ 不平行 $\overrightarrow{l_2}$) $\therefore$ $A=[t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定兩直線 $L_1: y=-2x$、$L_2: y=3x$, 此時

$$A=\begin{bmatrix}t&k\\3t&-2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}t&k\\3t&-2k\end{bmatrix}\times\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-1\\2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2k+3t&k-t\\-4k+9t&-2k-3t\end{bmatrix}(t、k\in\mathbb{R}-\{0\}).$$

性質 2.3 (**不過原點、平行**): 給定兩條不過原點的平行線: $L_1: ax+by=1$、$L_2: ax+by=\lambda$ $(\lambda\neq 0)$。僅當 $\lambda=-1$ 時, 存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$ (受 t、k 兩獨立變數影響, 其中 $t\in\mathbb{R}$、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$), 其中變換矩陣 $A=[-P+r\overrightarrow{l},k\overrightarrow{l}][P,\overrightarrow{l}]^{-1}$ ($\overrightarrow{l}$ 爲 L_1、L_2 的方向向量且 $P\in L_1$); 當 $\lambda\neq -1$ 時, 不存在平面變換 T 使得 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$。

證明: 由性質1.1(4), 令 $A\overrightarrow{l}=k\overrightarrow{l}$ $(k\in\mathbb{R}-\{0\})$, 又 $\overrightarrow{OP}$ 必不平行 $\overrightarrow{l}$ $\Rightarrow$ 必可令

$AP=\alpha P+r\overrightarrow{l}$ $(\alpha, r\in\mathbb{R})\Rightarrow A^2P=A(AP)=A(\alpha P+r\overrightarrow{l})=\alpha(AP)+rk\overrightarrow{l}=\alpha^2P+r(\alpha+k)\overrightarrow{l}$ 又 $A^2P\in L_1$, 所以 $\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm1$ (若 $\alpha=1$, 則代表 $L_2=L_1$, 不合) $\Rightarrow\alpha=-1$, 亦即 L_1、L_2 對稱於原點, 也就是 $\lambda=-1$, 得 $A[P,\overrightarrow{l}]=[AP,k\overrightarrow{l}]=[-P+r\overrightarrow{l},k\overrightarrow{l}]$ (同理, $[P,\overrightarrow{l}]^{-1}$ 必存在) $\Rightarrow A=[-P+r\overrightarrow{l},k\overrightarrow{l}][P,\overrightarrow{l}]^{-1}$。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定兩直線 $L_1: y=-2x+4$、$L_2: y=-2x-4$, 取 $\overrightarrow{l}=(1,-2)$、$P=(0,4)\in L_1$, 此時

$$A=\begin{bmatrix} r & k \\ -4-2r & -2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} r & k \\ -4-2r & -2k\end{bmatrix}\times\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} k+\frac{r}{2} & \frac{r}{4} \\ -2k-2-r & -\frac{r}{2}-1\end{bmatrix}.$$

註記: 將性質 2.1 中的矩陣 A 稍加運算, 不難發現 $\det A=-1$、$\lambda_A=\{1,-1\}$ 及 $A^2=I$ 的性質, 以及性質 2.2 中的矩陣有 $\lambda_A=\{v,-v\}$、$A^2=tI$ $(t\neq0)$ 的性質, 這部分在第三章會再與 n 條直線循環的平面變換一併做說明。

由性質 2.3 得知: 若兩條不過原點的平行線存在平面變換滿足 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$, 則這兩條直線會對稱於原點, 如圖 (一)。

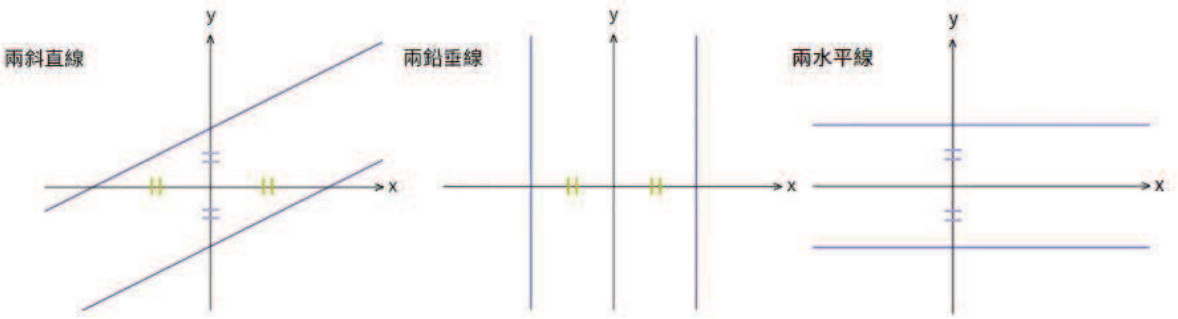

圖 (一)

(三) 使 n條直線循環 $(L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}\cdots\overset{A}{\to}L_n\overset{A}{\to}L_1)$ 的矩陣變換

在這一小節中, 我們證明若存在平面變換 T 使得 $L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}\cdots\overset{A}{\to}L_n\overset{A}{\to}L_1$, 則 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 只有以下兩種關係: n 條直線相鄰三條皆不共點、n 條直線共在原點, 並找出矩陣 A 的模樣。

引理 1: 任何二階實方陣 A 若可對角化, 則 A^n 可對角化; 若 A 不可對角化且特徵值不爲 0, 則 A^n 不可對角化, 其中 $n\geq2$。

證明:

(a) 若 A 可對角化, 則令 $A=PDP^{-1}$, 其中

$$D=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=(PDP^{-1})\times(PDP-1)\times(PDP^{-1})\times\cdots\times(PDP^{-1})$$
$$=PD^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{bmatrix}P^{-1}.$$

$\therefore$ A^n 可對角化。

(b) 若 A 不可對角化, 則 A 的特徵值重根, 由 *Jordan form*, 令 $A=P\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}P^{-1}$ $(\lambda\neq 0)$,

同理 $A^n=P\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n P^{-1}$, 因爲

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{所以}\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad (n\geq 2), \qquad (*)$$

已知 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \lambda\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \lambda\\ \lambda & 0\end{bmatrix}$ (交換律成立),

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n+n\times\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+C^n_2\times\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2+\cdots$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n+n\times\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$

(由 $(*)$, 後 $n-1$ 項皆爲 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$)。

$\because$ $n\geq 2$ 且 $\lambda\neq 0$ $\quad\therefore$ $n\lambda^{n-1}\neq 0$ 且 $(\lambda_A)^n=\{\lambda^n,\lambda^n\}$

$$\Rightarrow\ A^n-\lambda^nI=P\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n P^{-1}-P(\lambda^nI)P^{-1}=P\begin{bmatrix}0 & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}.$$

令 A^n 的特徵向量爲 X $(X \neq \overrightarrow{0})$,

$$\text{解 } (A^n - \lambda^n I)X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}X = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{只能取 } P^{-1}X = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (r \neq 0)$$

$$\Rightarrow X = P \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(代表只有單方向的特徵向量)},$$

$\therefore$ A^n 的特徵向量數不足, 亦即 A^n 不可對角化。

性質 3.1: 若矩陣 A 所構成的線性變換使得 n 條 $(n \geq 2)$ 相鄰不平行的直線循環, 則 $A^n = tI$ $(t \neq 0)$ 且 $(\lambda_A)^n = \{t\}$; 此外, A 必可對角化。

證明:

1° 令 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ 且 $A^n L_1 = tL_1$ $(t \neq 0)$, 其中 $\overrightarrow{l_1}$ 爲 L_1 的方向向量, 則 $A\overrightarrow{l_1} = k\overrightarrow{l_2}$ $(k \neq 0)$ 爲 L_2 的方向向量 $\Rightarrow A^n\overrightarrow{l_2} = A^n\big(\frac{1}{k} \times A\overrightarrow{l_1}\big) = A^{n+1}(\frac{1}{k}\overrightarrow{l_1}) = \frac{1}{k}A(A^n\overrightarrow{l_1}) = \frac{1}{k}A(t\overrightarrow{l_1}) = t\overrightarrow{l_2} \Rightarrow A^n[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}] = t[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]$, 又由 $\overrightarrow{l_1} \nparallel \overrightarrow{l_2}$ 可知 $[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 存在, $\therefore$ 兩邊同乘 $[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$可得 $A^n = tI$ $(t \neq 0)$ 且 $(\lambda_A)^n = \{t\}$。

2° 若 $0 \in \lambda_A$, 則由特徵理論得知, $0 \in (\lambda_A)^n$ (矛盾) $\therefore$ $0 \notin \lambda_A$。又若 A 不可對角化, 且 $0 \notin \lambda_A$, 則由引理1可推得 A^n 不可對角化 (與 $A^n = tI$ 矛盾)。$\therefore$ A 必可對角化。

引理 2: 承性質3.1, 若再加上這 n 條相鄰不平行的直線皆不過原點, 則 $t = 1$, 亦即 $A^n = I$。

證明: 由這 n 條直線相鄰不平行得知, 任意相鄰的直線必存在交點, 引理 1 告訴我們: $L_1 \cap L_2 \xrightarrow{A} L_2 \cap L_3 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_1 \cap L_2 \Rightarrow$ 設 $L_1 \cap L_2 = P \neq (0,0)$, 則 $A^n P = P$ 又 $A^n = tI \Rightarrow A^n P = tP = P$ $\therefore$ $t = 1$, 亦即 $A^n = I$。

性質 3.2: (**共交點, 此點非原點**)不存在任何的平面變換, 使得 n 條 $(n \geq 3)$ 共交點 $P(x_0, y_0) \neq (0,0)$ 的相異直線 L_1、L_2、L_3、$\cdots$、L_n 循環, 亦即 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$。

證明: 由引理 2, $A^n = I$ 且 $(\lambda_A)^n = \{1, 1\}$, 再由性質 3.1 得知, A 可對角化, 由 $AP = P$, 令 $\lambda_A = \{1, \lambda\}$, 則 $\lambda^n = 1$ 且 $\det A = \lambda \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow A = I$ 或 $A^2 = I$, 亦即 $n = 1$ 或 2 (與 $n \geq 3$ 矛盾), 所以不存在此種平面變換。

性質 3.3: (**平行皆不過原點**)不存在任何的平面變換, 使得 n 條 $(n\geq 3)$ 平行的相異直線 L_1、L_2、L_3、$\cdots$、L_n 循環, 亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。

證明: <Case1> L_1 有斜率

令 $L_1: y=mx+k_1$ $(k_1\neq 0)$、$L_2: y=mx+k_2$ $(k_2\neq 0)$、$\cdots$、$L_n: y=mx+k_n$ $(k_n\neq 0)$ $P_1(0,k_1)\in L_1$, $P_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}bk_1\\dk_1\end{bmatrix}\in L_2$, P_2 代入 L_2 得 $dk_1=m(bk_1)+k_2\Rightarrow k_2=(d-mb)k_1$, 同理 $k_3=(d-mb)k_2=(d-mb)2k_1$、$\cdots$、$k_n=(d-mb)k_{n-1}=(d-mb)^{n-1}k_1\Rightarrow k_1=(d-mb)^nk_1\Rightarrow(d-mb)^n=1$, 即 $|d-mb|=1$, $d-mb=1\Rightarrow k_2=(d-mb)k_1=k_1$ (矛盾); $d-mb=-1\Rightarrow k_3=(d-mb)^2k_1=k_1$ (矛盾)。$\therefore$ 變換矩陣 A 不存在。

<Case2> L_1 是鉛垂線

令 $L_1: x=k_1$ $(k_1\neq 0)$、$L_2: x=k_2$ $(k_2\neq 0)$、$\cdots$、$L_n: x=k_n$ $(k_n\neq 0)$。$P_1(k_1,0)\in L_1$, $P_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ak_1\\ck_1\end{bmatrix}\in L_2$, P_2 代入 L_2 得 $ck_1=m(ak_1)+k_2\Rightarrow k_2=(c-ma)k_1$。證明同<Case1>, 變換矩陣 A 不存在。

引理 3: 若二階實方陣 A 滿足 $A^{2n}=I$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$、$A^k\neq I$ $(k=1,2,\ldots,2n-1)$, 則 $\det A=1$ 且 $A^n=-I$。

證明:

1° 由性質3.1, A 可對角化, 又 $(\lambda_A)^{2n}=\{1,1\}\Rightarrow$ 令 $\lambda_A=\{\cos\theta+i\sin\theta,y\}$

$$(\det A)^{2n}=\det(A^{2n})=\det(I)=1\Rightarrow\det A=\pm1$$

若 $\det A=-1=(\cos\theta+i\sin\theta)y\Rightarrow y=-\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=-\cos\theta+i\sin\theta$

又 trace $A=(\cos\theta+i\sin\theta)+(-\cos\theta+i\sin\theta)=2i\sin\theta\in\mathbb{R}$

所以 $\sin\theta=0\Rightarrow\cos\theta=\pm1$, 亦即 $\lambda_A=\{1,-1\}\Rightarrow A^2=I$ (矛盾) $\therefore$ $\det A=1$。

2° 由 $\det A^n=1$, 對 A^n 做 *Cayley-Hamilton* 定理

得 $(A^n)^2-(\text{trace}A^n)A^n+I=0=(A^n)^2-I$ $(\because\ A^{2n}=I)\Rightarrow A^n=\Big(\dfrac{2}{\text{trace}\,A^n}\Big)I$

又 $\det A^n=1\Rightarrow\Big(\dfrac{2}{\text{trace}\,A^n}\Big)^2=1\Rightarrow$ $\text{trace}\,A^n=\pm2$ (正不合) $\therefore$ $A^n=-I$。

性質 3.4: 若矩陣 A 的平面變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$ $(n\geq 3)$, 其中 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 爲相鄰不平行且不過原點的相異直線, 則:

(a) 若 n 爲偶數, 令 $\frac{n}{2} = r$, 則 L_k 與 L_{k+r} 對稱於原點 $(k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1)$, 且 $L_1, L_2, \ldots, L_{r-1}$ 中, 任意兩條直線皆不平行。

(b) 若 n 爲奇數, 則 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 中, 任意兩條直線皆不平行。

證明:

(a) 1° 由引理 2 得知 $A^n = I$, 再由引理 3 得知 $A^r = -I$, 令 $P \in L_1$, 則 $A^r P = -P$, 所以 L_1 上的每一個點經由矩陣 A 變換 r 次後皆會與原本的點對稱於原點, 亦即 L_1 與 L_{r+1} 對稱於原點。同理可知, L_k 與 L_{r+k} 對稱於原點 $(k = 1, 2, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1)$。

2° 由 1° 得知, $L_1 \sim L_n$ 經由矩陣 A 變換 r 次後, 都會變成一條與原本直線平行的新直線。若 $L_1, L_2, \ldots, L_{r-1}$ 中有兩條直線平行, 也就是存在 $t < r$, 使得 $L_1 \sim L_n$ 經由矩陣 A 變換 t 次後, 都會變成一條與原本直線平行的新直線。我們令 k 爲所有 t 的可能值中最小者, 則 k 必爲 r 的因數 ($\because$ 若不是, 則會導出 k 不是最小者, 矛盾)。此時, $L_1 \sim L_r$ 及 $L_{r+1} \sim L_n$ 中, 必定分別都存在一條以上與 L_1、L_{r+1} 平行且相異的直線。在 A^k 的變換下循環, 這與性質 3.3 的結論矛盾。

(b) 若 n 爲奇數, 仿照 (a) 的方式去定義 k, 則 k 必爲 n 的因數。但是 k 必不等於 $\frac{n}{2}$ ($\because$ $\frac{n}{2}$ 不是整數) $\Rightarrow$ k 最大可能爲 $\frac{n}{3}$ $\Rightarrow L_1 \sim L_n$ 中, 必定存在兩條以上與 L_1 平行且相異的直線。在 A^k 的變換下循環, 這與性質 3.3 的結論矛盾。

性質 3.5: (**不平行、不共點**) 對於任兩條不平行且不過原點之直線 L_1, L_2, 存在一組以上, $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 組以下的 $L_3, \ldots, L_n$ ($n \geq 3$ 且 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 皆相異), 每一組直線分別都存在唯一的線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$。

證明:

1° 由性質1.3, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 相鄰不平行。所以引理 2 告訴我們 $A^n = I$, 再由性質 3.1 得知, A 可對角化。仿照引理 3 中的證法, 可以得到不論 n 爲奇數還是偶數, 都有 $\det A = 1$ 及 $\lambda_A = \{\cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta\}$, 其中 $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ ($\because$ $k = n$ 時, $\lambda_A = \{1, 1\}$, 亦即 $A = I$, 不合)。注意到當 θ 變成 $2\pi - \theta$ 時, λ_1 與 λ_2 的值其實只是對調而已, 所以 $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, 又因爲循環長度必須爲 n (不能縮短成 $\frac{n}{2}$ 或更短), 所以 $\gcd(k, n) = 1$。

2° 令 $L_1 : ex + fy = 1$、$L_2 : gx + hy = 1$、$L_3 : ix + jy = 1$, 其中 $L_1 \cap L_2 = (x_0, y_0)$ 且 $L_2 \cap L_3 = (x_1, y_1)$, 取 $l_1 = (-f, e)$、$l_2 = (-h, g)$、$l_3 = (-j, i)$, 令 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & -f \\ y_0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -ht \\ y_1 & gt \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$, 其中 A 需滿足 $\det A = 1 \Rightarrow \det A \times (ex_0 + fy_0) = t(gx_1 + hy_1) \Rightarrow$

$\det A\times 1=t\times 1\Rightarrow t=1$。$\therefore\ A\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_2}$, 同理可得 $A\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_3}\Rightarrow$ 令 $L_4: mx+ny=1$, $\overrightarrow{l_4}=(-n,m)$, 一樣有 $A\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_4}$ 炮製以上方法, 我們假設 $L_4\sim L_n$, 並得到對應的 $\overrightarrow{l_4}\sim\overrightarrow{l_n}$。

3° 令 $\overrightarrow{l_3}=\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

$$A[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_2},\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}]\Rightarrow A=[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix}0&-\alpha\\1&\beta\end{bmatrix}[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\det A=\alpha=1\\ \operatorname{trace}A=\beta=2\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{l_3}=2\cos\theta\overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1}.$$

令 $\overrightarrow{l_k}=\delta\overrightarrow{l_2}-\gamma\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_{k+1}}=\mu\overrightarrow{l_2}-\varepsilon\overrightarrow{l_1}$ $(k=3\sim n-1)$

$$A[\overrightarrow{l_1},\delta\overrightarrow{l_2}-\gamma\overrightarrow{l_1}]=[\overrightarrow{l_2},\mu\overrightarrow{l_2}-\varepsilon\overrightarrow{l_1}].$$

仿照第二章的作法, 左右兩邊同取 det 可得 $\varepsilon=\delta$ (1)

$$A^{k-1}[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\delta\overrightarrow{l_2}-\gamma\overrightarrow{l_1},\mu\overrightarrow{l_2}-\varepsilon\overrightarrow{l_1}]$$
$$\Rightarrow A^{k-1}=[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix}-\gamma&-\varepsilon\\ \delta&\mu\end{bmatrix}[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}.$$

由棣美弗性質, trace $A=2\cos(k-1)\theta=\mu-\gamma\Rightarrow\mu=\gamma+2\cos(k-1)\theta.$ (2)

4° 由 (1)、(2) 兩大遞迴關係可得

$\overrightarrow{l_4}=(2\cos 2\theta+1)\overrightarrow{l_2}-2\cos\theta\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_5}=(2\cos 3\theta+2\cos\theta)\overrightarrow{l_2}-(2\cos 2\theta+1)\overrightarrow{l_1}$、
$\overrightarrow{l_6}=(2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1)\overrightarrow{l_2}-(2\cos 3\theta+2\cos\theta)\overrightarrow{l_1}\cdots\cdots$ 依此類推。

構件一個數列:

$a_1=1$、$a_2=2\cos\theta$、$a_3=2\cos 2\theta+1$、$a_4=2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_5=2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1$、
$a_6=2\cos 5\theta+2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_7=2\cos 6\theta+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1\cdots\cdots$ 依此類推。

最後可得若 $r=3\sim n$, 則 $\overrightarrow{l_r}=a_{r-1}\overrightarrow{l_2}-a_{r-2}\overrightarrow{l_1}$。
而矩陣 A 則是透過 $A[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}]\Rightarrow A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 來求得。

5° 解法統整如下:

(a) 將 L_1、L_2 寫成 $ex+fy=1$、$gx+hy=1$ 之形式, 並取 $(-f,e)$、$(-h,g)$ 分別作爲 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$。

(b) 判斷 θ 的可能值: $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}])$ 且 $\gcd(k,n)=1$。

(c) $L_3 \sim L_n$ 的通式如下:

$L_r : a_{r-1}(gx+hy) - a_{r-2}(ex+fy) = 1$, 其中

$a_1=1$、$a_2=2\cos\theta$、$a_3=2\cos 2\theta+1$、$a_4=2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_5=2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1$、$a_6=2\cos 5\theta+2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_7=2\cos 6\theta+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1\cdots\cdots$ 依此類推。

(d) 依照通式寫出 L_3 後, 仿照 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 求出 $\overrightarrow{l_3}$, 然後 $A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$。

註記: 若給定兩相交直線 L_1、L_2 及任意數正整數 n ($n\geq 3$), 我們就可以決定 L_3、L_4、...、L_n 及矩陣 A 使得他們循環, 更進一步來說, 給定 n 條直線 L_1、L_2、L_3、...、L_n ($n\geq 3$), 我們即可判斷這 n 條直線是否會循環。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定 2 條直線 $L_1 : y=2x+1$、$L_2 : y=\frac{-5x}{4}+\frac{1}{4}$,

求 $L_3 \sim L_6$ 及矩陣 A 使得 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_6 \xrightarrow{A} L_1$。

(a) 移項整理成 $L_1 : -2x+y=1$、$L_2 : 5x+4y=1$。

(b) $[\frac{6-1}{2}]=2 \Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{6}$ ($k=1,2$), 但 $k=2$ 不合, 所以 $\theta=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$。

(c) $L_3 : 2\cos\frac{\pi}{3}(5x+4y)-(-2x+y)=1 \Rightarrow L_3 : 7x+3y=1$。

再由性質 3.4 得知, L_4、L_5、L_6 分別與 L_1、L_2、L_3 對稱

$\therefore$ $L_4 : -2x+y=-1$、$L_5 : 5x+4y=-1$、$L_6 : 7x+3y=-1$, 此時,

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\frac{1}{-13}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}.$$

性質 3.6: (**不平行、共原點**)對於任三條過原點的相異直線 L_1、L_2、L_3, 存在 1 組以上、$[\frac{n-1}{2}]$ 組以下的過原點直線 $L_4,\ldots,L_n$ ($n\geq 3$ 且 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 皆相異) 及矩陣 A, 每一組直線分別都存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$。

證明:

1° 由性質1.3, $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 相鄰不平行, 所以性質 3.1 告訴我們 $A^n=\mu I$ ($\mu\in\mathbb{R}-\{0\}$), 令 $v>0$ 滿足 $v^n=\mu$, 仿照引理 3 中的證法假設 $\lambda_A=\{v(\cos\theta+i\sin\theta),y\}$ 以及去討論 $\det A=\pm v^2$, 最後證得 $\lambda_A=\{v(\cos\theta+i\sin\theta), v(\cos\theta-i\sin\theta)\}$ 以及 $\det A=v^2$, 同理, $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ ($k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$) 且 $\gcd(k,n)=1$, 但要注意的是, 當 $n=2s$ ($s\in\mathbb{N}$ 且 $s\geq 2$) 時, $A^s=-v^2I \Rightarrow$ 會讓過原點直線 $L_1,L_2,\ldots,L_s$ 循環。$\therefore$ 當 n 爲偶數時, 必須令 $\theta=\frac{2k\pi}{n}\times\frac{1}{2}=\frac{k\pi}{n}$。

2° 由於 $L_1 \sim L_n$ 爲過原點的直線, 只須滿足方向向量的變換, $\therefore$ $L_1 \sim L_n$ 的模樣不受 v 影響, 可先假設 $\det A = 1$, 亦即 $A^n = I$, 任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量, 線性組合告訴我們, 一定可以取適當的 $\overrightarrow{l_3}$ 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ 使得 $2\cos\theta\overrightarrow{l_3} = 2\cos\theta(\beta\overrightarrow{l_2}) - (2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1})$。這意味著, 我們可以取 $2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{l_2'}$、$2\cos\theta\overrightarrow{l_3} = \overrightarrow{l_3'}$ 並依照定理3.5的方法, 分別構造出不過原點且分別與 L_1、L_2、L_3平行的直線L_1'、L_2'、L_3', 使得在 $A^n = I$ 之下滿足 $L_1' \xrightarrow{A} L_2' \xrightarrow{A} L_3' \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} L_n' \xrightarrow{A} L_1'$, 其中 L_r' 會與 L_r 平行 $(r = 4 \sim n)$, 則 $l_r' = a_{r-1}(\beta\overrightarrow{l_2}) - a_{r-2}(2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1})$, 其中

$a_1 = 1$、$a_2 = 2\cos\theta$、$a_3 = 2\cos 2\theta + 1$、$a_4 = 2\cos 3\theta + 2\cos\theta$、$a_5 = 2\cos 4\theta + 2\cos 2\theta + 1$、$a_6 = 2\cos 5\theta + 2\cos 3\theta + 2\cos\theta$、$a_7 = 2\cos 6\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 2\theta + 1 \cdots\cdots$ 依此類推。

3° 我們再來研究這個數列, 取性質 3.5 中的其中一條式子:

$$\begin{aligned}
&A[\overrightarrow{l_1}, \delta\overrightarrow{l_2} - \gamma\overrightarrow{l_1}] = [\overrightarrow{l_2}, \mu\overrightarrow{l_2} - \varepsilon\overrightarrow{l_1}],\\
&\Rightarrow A[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = [\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \mu \end{bmatrix},\\
&\Rightarrow A = [\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & \delta \end{bmatrix}^{-1}[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1},\\
&\quad = [\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \delta & \gamma + \mu \end{bmatrix}[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1},\\
&\Rightarrow \operatorname{trace} A = 2\cos\theta = \frac{\gamma + \mu}{\delta} \Rightarrow \gamma + \mu = 2\cos\theta\delta.
\end{aligned}$$

這相當於 $a_{r-2} \times 2\cos\theta = a_{r-1} + a_{r-3} \Rightarrow \overrightarrow{l_r'} = a_{r-1}(\beta\overrightarrow{l_2}) - (a_{r-1} + a_{r-3})(\alpha\overrightarrow{l_1}) = a_{r-1}(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}) - a_{r-3}(\alpha\overrightarrow{l_1}) = a_{r-1}\overrightarrow{l_3} - a_{r-3}(\alpha\overrightarrow{l_1})$.

與性質3.5不同的是, 性質3.6的這 n 條直線共點, 所以我們真的可以跟高中學到的直線族一樣, 把 L_r 寫成某倍 L_1 加某倍 L_2, 而矩陣 A 則是透過 $A[2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1}, \beta\overrightarrow{l_2}] = [\beta\overrightarrow{l_2}, 2\cos\theta\overrightarrow{l_3}] \Rightarrow A = [\beta\overrightarrow{l_2}, 2\cos\theta\overrightarrow{l_3}][2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1}, \beta\overrightarrow{l_1}]^{-1}$ 來求得, 但要加上 v 的係數倍。

4° 解法統整如下:

(a) 任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量, 然後取適當的 $\overrightarrow{l_3}$ 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, 使得 $\overrightarrow{l_3} = \beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}$。

(b) 判斷 θ 的可能值: $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, [\frac{n-1}{2}])$ 且 $\gcd(k, n) = 1$ 但是當 n 爲偶數時, $\theta = \frac{k\pi}{n}$。

(c) 使用新的方向向量 $\alpha\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_3}$, 利用「方向向量交換加負號」的方式寫出 L_1、L_3 (舉例: $\alpha\overrightarrow{l_1}=(2,3)\Rightarrow L_1: 3x-2y=0$)。

(d) 使用上一個步驟寫下來的 L_1、L_3, $L_4\sim L_n$ 的通式如下:

$L_r: a_{r-1}L_3-a_{r-3}L_1$, 其中

$a_1=1$、$a_2=2\cos\theta$、$a_3=2\cos 2\theta+1$、$a_4=2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_5=2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1$、$a_6=2\cos 5\theta+2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_7=2\cos 6\theta+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1\cdots\cdots$ 依此類推。

(e) $A=v[\beta\overrightarrow{l_2}, 2\cos\theta\overrightarrow{l_3}][2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1}, \beta\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ $(v\in\mathbb{R}-\{0\})$。

註記: 若給定三直線 L_1、L_2、L_3 及任意數正整數 n $(n\geq 3)$, 我們就可以決定 L_4、...、L_n 及矩陣 A 使得他們循環, 更進一步來說, 給定 n 條直線 L_1、L_2、L_3、...、L_n $(n\geq 3)$, 我們即可判斷這 n 條直線是否會循環。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定 3 條直線 $L_1: y=3x$、$L_2: y=4x$、$L_3: y=8x$

求 $L_4\sim L_6$ 及矩陣 A 使得 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\xrightarrow{A}L_6\xrightarrow{A}L_1$。

(a) 取 $\overrightarrow{l_1}=(1,3)$、$\overrightarrow{l_2}=(1,4)$, 再取 $\overrightarrow{l_3}=(1,8)=5\overrightarrow{l_2}-4\overrightarrow{l_1}$。

(b) $[\frac{6-1}{2}]=2\Rightarrow\theta=\frac{k\pi}{6}$ $(k=1,2)$, 但 $k=2$ 不合, 所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$。

(c) $4\overrightarrow{l_1}=(4,12)$、$\overrightarrow{l_3}=(1,8)$

$\Rightarrow L_1: 12x-4y=0$、$L_3: 8x-y=0$。

(d) $L_4: (2\cos 60^\circ+1)(8x-y)-(12x-4y)=0$

$\Rightarrow L_4: y=-2x$。

$L_5: (2\cos 90^\circ+2\cos 30^\circ)(8x-y)-2\cos 30^\circ(12x-4y)=0$

$\Rightarrow L_5: y=\frac{4}{3}x$。

$L_6: (2\cos 120^\circ+2\cos 60^\circ+1)(8x-y)-(2\cos 60^\circ+1)(12x-4y)=0$

$\Rightarrow L_6: y=\frac{16}{7}x$。

(e) $A=v\begin{bmatrix}5 & \sqrt{3}\\ 20 & 8\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\sqrt{3} & 5\\ 12\sqrt{3} & 20\end{bmatrix}^{-1}=v\begin{bmatrix}5 & \sqrt{3}\\ 20 & 8\sqrt{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{20\sqrt{3}}\begin{bmatrix}20 & -5\\ -12\sqrt{3} & 4\sqrt{3}\end{bmatrix}$

$=v\times\frac{1}{20\sqrt{3}}\begin{bmatrix}64 & -13\\ 112 & -4\sqrt{3}\end{bmatrix}$ $(v\in\mathbb{R}-\{0\})$。

可經由同乘, 簡化爲 $A=v\begin{bmatrix}64 & -13\\ 112 & -4\end{bmatrix}$。

(四) 使 1 條直線循環 ($L_1 \xrightarrow{A} L_1$) 的矩陣變換

這一小節中, 我們將處理滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$ 的線性變換, 並利用 L_1 與 L_2 的相交情形, 對平面變換 T 的變換矩陣 A 做討論。

性質 4.1: 若 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$, 且 L_1 上有無限多個固定點, 其中 $(0,0) \notin L_1$, 則坐標平面上的每一個點都是固定點, 以及 $A = I$。

證明: 令其中兩個固定點爲 P、Q, 則 $AP = P$、$AQ = Q \Rightarrow A(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}$、$A(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OQ}$, $\because$ L_1 不過 $(0,0)$, $\therefore$ $\overrightarrow{OP}$ 不平行 $\overrightarrow{OQ} \Rightarrow [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^{-1}$ 存在 $A[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}] = [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]$ 兩邊同乘 $[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^{-1} \Rightarrow A = I$, 亦即坐標平面上的每一個點都是固定點。

註記: 性質 4.1 結合性質 1.4 可以得知, 若不過原點的直線 L_1 滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$, 則其平面變換 T 可分爲 3 種類型: (a) $A = I$、(b) A 將 L_1 上的每一個點皆沿著 L_1 的方向平移固定長度、(c) L_1 上存在唯一固定點 P, 其他點以 P 爲縮放中心, 沿著 L_1 的方向來進行特定比例的縮放。

性質 4.2: 給定不過原點的直線: $L_1 : ax + by = 1$, 任取 L_1 的方向向量 L_1、$P \in L_1$, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$, 其中變換矩陣 $A = [P + r\overrightarrow{l_1}, k\overrightarrow{l_1}][P, \overrightarrow{l_1}]^{-1}$ (受 r、k 兩變數影響, 其中 $r \in \mathbb{R}$、$k \in \mathbb{R} - \{0\}$)。

證明: $\because$ $A[P, \overrightarrow{l_1}] = [P + r\overrightarrow{l_1}, k\overrightarrow{l_1}]$ 且 $[P, \overrightarrow{l_1}]^{-1}$ 存在 ($\because$ $\overrightarrow{OP}$ 不平行 $\overrightarrow{l_1}$)

$\therefore$ $A = [P + r\overrightarrow{l_1}, k\overrightarrow{l_1}][P, \overrightarrow{l_1}]^{-1}$。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定一直線 $L_1 : y = -2x + 4$, 取 $P(0,4)$、$L_1 = (1,-2)$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} r & k \\ 4-2r & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r & k \\ 4-2r & -2k \end{bmatrix} \times \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+\frac{1}{2}r & \frac{1}{4}r \\ 2-r-2k & 1-\frac{1}{2}r \end{bmatrix}.$$

性質 4.3: 給定過原點的直線 L_1, 任取 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{l_1}$, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$, 其中變換矩陣 A 的通解爲滿足 $(A - \lambda I)\overrightarrow{l_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$ 的所有矩陣 A。

證明: 同性質 2.2, 已滿足 $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 只需再滿足 $A\overrightarrow{l_1} = \lambda\overrightarrow{l_1}$ $(\lambda \neq 0)$, $\therefore$ $A\overrightarrow{l_1} = \lambda\overrightarrow{l_1} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{l_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

有了上述公式後, 對於此類問題我們可以快速地解決, 舉例如下:

給定一直線 $L_1: y=-2x$, 此時 $(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=\lambda+2b \\ c=2d-2\lambda \end{cases}$,

$\therefore\ A=\begin{bmatrix} \lambda+2b & b \\ -2\lambda+2d & d \end{bmatrix}$。

四、結論

(1) 給定不過原點不平行的兩條直線 $L_1: ax+by=1$、$L_2: cx+dy=1$, 則存在唯一的線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$, 其中變換矩陣 $A=[-\overrightarrow{l_2},-\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$, 其中 $\overrightarrow{l_1}=(b,-a)$、$\overrightarrow{l_2}=(d,-c)$ (也就是行向量 $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$)。

(2) 給定過原點不平行的兩條直線 L_1、L_2, 任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$, 其中變換矩陣 $A=[t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ (受 t、k 兩獨立變數影響, 其中 t、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$)。

(3) 給定兩條不過原點的平行線: $L_1: y=ax+by=1$、$L_2: ax+by=\lambda$ $(\lambda\neq 0)$。僅當 $\lambda=-1$ 時, 存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$ (受 t、k 兩獨立變數影響, 其中 $t\in\mathbb{R}$、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$), 其中變換矩陣 $A=[-P+t\overrightarrow{l},k\overrightarrow{l}][P,\overrightarrow{l}]^{-1}$ ($\overrightarrow{l}$ 爲 L_1、L_2 的方向向量且 $P\in L_1$); 當 $\lambda\neq -1$ 時, 不存在平面變換 T 使得 $L_1\overset{A}{\leftrightarrow}L_2$。

(4) 不存在任何的平面變換, 使得 n 條 $(n\geq 3)$ 共交點 $P(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 的相異直線 L_1、L_2、L_3、$\cdots$、L_n 循環, 亦即 $L_1\overset{A}{\rightarrow}L_2\overset{A}{\rightarrow}L_3\overset{A}{\rightarrow}\cdots\overset{A}{\rightarrow}L_n\overset{A}{\rightarrow}L_1$。

(5) 不存在任何的平面變換, 使得 n 條 $(n\geq 3)$ 平行的相異直線 L_1、L_2、L_3、$\ldots$、L_n 循環, 亦即 $L_1\overset{A}{\rightarrow}L_2\overset{A}{\rightarrow}L_3\overset{A}{\rightarrow}\cdots\overset{A}{\rightarrow}L_n\overset{A}{\rightarrow}L_1$。

(6) 對於任兩條不平行且不過原點之直線 L_1,L_2, 存在一組以上, $[\frac{n-1}{2}]$ 組以下的 $L_3,\ldots,L_n$ $(n\geq 3$ 且 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 皆相異), 每一組直線分別都存在唯一的線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\rightarrow}L_2\overset{A}{\rightarrow}\cdots\overset{A}{\rightarrow}L_n\overset{A}{\rightarrow}L_1$。

解法統整如下:

(a) 將 L_1、L_2 寫成 $ex+fy=1$、$gx+hy=1$ 之形式, 並取 $(-f,e)$、$(-h,g)$ 分別作爲 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$。

(b) 判斷 θ 的可能值: $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}])$ 且 $\gcd(k,n)=1$。

(c) $L_3\sim L_n$ 的通式如下:

$L_r: a_{r-1}(gx+hy)-a_{r-2}(ex+fy)=1$, 其中

$a_1=1$、$a_2=2\cos\theta$、$a_3=2\cos 2\theta+1$、$a_4=2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_5=2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1$、$a_6=2\cos 5\theta+2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_7=2\cos 6\theta+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1\cdots\cdots$ 依此類推。

(d) 依照通式寫出 L_3 後, 仿照 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 求出 $\overrightarrow{l_3}$, 然後 $A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$。

(7) 對於任三條過原點的相異直線 L_1、L_2、L_3, 存在 1 組以上、$[\frac{n-1}{2}]$ 組以下的過原點直線 $L_4,\ldots,L_n$ ($n\geq 3$ 且 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 皆相異) 及矩陣 A, 每一組直線分別都存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\to}L_2\overset{A}{\to}\cdots\overset{A}{\to}L_n\overset{A}{\to}L_1$。

解法統整如下:

(a) 任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別做爲 L_1、L_2 的方向向量, 然後取適當的 $\overrightarrow{l_3}$以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, 使得 $\overrightarrow{l_3}=\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}$。

(b) 判斷 θ 的可能值: $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ ($k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$) 且 $\gcd(k,n)=1$ 但是當 n 爲偶數時, $\theta=\frac{k\pi}{n}$。

(c) 使用新的方向向量 $\alpha\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_3}$, 利用「方向向量交換加負號」的方式寫出 L_1、L_3 (舉例: $\alpha\overrightarrow{l_1}=(2,3)\Rightarrow L_1: 3x-2y=0$)。

(d) 使用上一個步驟寫下來的 L_1、L_3, $L_4\sim L_n$ 的通式如下:

$L_r: a_{r-1}L_3-a_{r-3}L_1$, 其中

$a_1=1$、$a_2=2\cos\theta$、$a_3=2\cos 2\theta+1$、$a_4=2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_5=2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1$、$a_6=2\cos 5\theta+2\cos 3\theta+2\cos\theta$、$a_7=2\cos 6\theta+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta+1\cdots\cdots$ 依此類推。

(e) $A=v[\beta\overrightarrow{l_2},2\cos\theta\overrightarrow{l_3}][2\cos\theta\alpha\overrightarrow{l_1},\beta\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ ($v\in\mathbb{R}-\{0\}$).

(8) 給定不過原點的直線: $L_1: ax+by=1$, 任取 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{l_1}$、$P\in L_1$, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\to}L_1$ (受 t、k 兩變數影響, 其中 $r\in\mathbb{R}$、$k\in\mathbb{R}-\{0\}$), 其中變換矩陣 $A=[P+r\overrightarrow{l_1},k\overrightarrow{l_1}][P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$。

(9) 給定過原點的直線 L_1, 任取 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{l_1}$, 則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\to}L_1$, 其中變換矩陣 A 的通解爲滿足 $(A-\lambda I)\overrightarrow{l_1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ($\lambda\neq 0$) 的所有矩陣 A。

特別感謝指導老師: 蔡其南老師。

参考文獻

1. 程雋。線性代數論。新北市: 文笙書局, 民國111年。

—本文作者趙湞揚、龔書宏 (投稿時就讀國立彰化高級中學)—